

# Trave di fondazione con tensioni tangenziali di contatto: influenza dei vari parametri

E. BILOTTA \*

**SOMMARIO:** Da alcuni risultati riportati in una precedente nota [BILOTTA, 1982], si è già osservato come le tensioni tangenziali di contatto provocano una riduzione dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi della trave. Per esaminare l'influenza che in tal senso esercitano i vari parametri in gioco, vengono confrontati i risultati ottenuti con le ipotesi di interfaccia liscia, con perfetta aderenza o dotata d'attrito superficiale trave-terreno. Tali risultati evidenziano come i parametri più influenti per le suindicate riduzioni siano la rigidità della trave e il coefficiente di Poisson del terreno; minore importanza assumono lo spessore dello strato di terreno ed il rapporto tra la lunghezza e la larghezza della trave. Per quanto riguarda il tipo di legame ipotizzato per l'interfaccia, si può constatare come, abbandonando l'ipotesi poco cautelativa della perfetta aderenza, una interfaccia dotata d'attrito può produrre riduzioni dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi che, per uno schema realistico di carichi quale quello assunto nella presente analisi, risultano del 20% circa inferiori a quelli relativi all'ipotesi di perfetta aderenza. In ogni caso, per i valori che i parametri in gioco possono comunemente assumere nella pratica tecnica, i momenti e i cedimenti differenziali massimi che si ottengono portando in conto le tensioni tangenziali di contatto risultano solo del 15-20% inferiori a quelli che si ottengono con l'ipotesi d'interfaccia liscia.

## 1. Introduzione

I momenti flettenti che assumono notevole importanza nel proporzionamento di una trave di fondazione, sono molto sensibili alle variazioni delle tensioni di contatto; di qui la ricerca della più realistica distribuzione di queste tensioni.

La prima teoria che supera la semplicistica ipotesi di distribuzione lineare della pressione di contatto è quella di WINKLER [1867] che considera la deformabilità della struttura e del terreno.

Concettualmente più soddisfacenti sono le teorie basate sui modelli di semispazio elastico omogeneo e di semispazio alla GIBSON [1967]. Tra le soluzioni analitiche proposte per il caso di semispazio omogeneo e isotropo con interfaccia liscia tra la trave ed il terreno, troviamo quelle di SADOWSKY [1928], BOROWICHA [1936], LEE *et al.* [1969] e BROWN [1972, 1975].

L'esperienza comunque mostra che travi calcolate con una qualunque delle suddette teorie (distribuzione lineare, Winkler, semispazio elastico) non hanno presentato mai danni, per cui si è propensi a ritenere che tutte sovrastimino il reale stato di sollecitazione. Terzaghi, nel 1947, faceva rilevare la mancanza di un'analisi che tenesse conto delle tensioni tangenziali di contatto. MUSKHELISHVILI [1963] propone una soluzione per striscia di carico infinitamente

rigida nell'ipotesi di perfetta aderenza alla superficie di contatto. SPENCE [1973] affronta il problema con riferimento ad un comportamento rigido plastico del legame all'interfaccia trave-terreno. Conway [CONWAY *et al.*, 1966] esamina il problema di una striscia di carico su uno strato di spessore limitato fornendo soluzioni per il caso di striscia a rigidità infinita.

Il problema della trave di fondazione è stato studiato anche per via numerica: i risultati ottenuti dai vari Autori sono raccolti, in forma parametrica, in numerose tabelle e diagrammi riportati in letteratura [BARDEN, 1962; SHERIF e KOENIG, 1975; ESPOSITO *et al.*, 1978].

Per analizzare il comportamento di una trave di fondazione su semispazio e su strato di spessore limitato in presenza di tensioni tangenziali di contatto, l'autore ha esposto [BILOTTA, 1982] un procedimento di calcolo utile per qualunque condizione di carico e di vincolo; è stato inoltre evidenziato il ruolo che ciascun parametro gioca nella soluzione del problema. I risultati esemplificativi ivi riportati hanno mostrato che le tensioni tangenziali di contatto possono offrire un contributo positivo nel proporzionamento della trave, riducendo i momenti e i cedimenti differenziali massimi rispetto a quelli che si hanno per l'interfaccia liscia.

Per valutare il significato che tali riduzioni possono assumere nella pratica tecnica, altri risultati ed in forma più dettagliata vengono qui riportati, al variare dei singoli parametri in gioco.

\* Ing. Eduardo BILOTTA, Assistente Ordinario ed Incaricato Stabilizzato di *Geotecnica* - Università della Calabria.

## 2. Parametri in gioco

Il procedimento di calcolo impiegato è basato sul concetto di discretizzazione delle tensioni di contatto, per cui la reale distribuzione viene sostituita con quella a scalini, con fattore di discretizzazione  $n = \frac{L}{l}$ , come indicato in fig. 1.

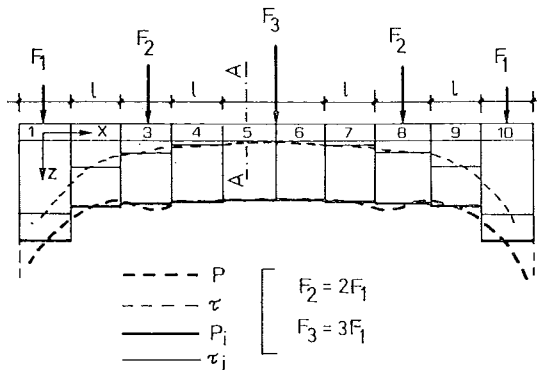


Fig. 1. - Schema di carichi impiegati nell'analisi e discretizzazione delle tensioni di contatto.

Nell'ipotesi d'interfaccia liscia ( $\tau_i = 0$ ) le incognite del problema sono gli  $n$  valori delle pressioni di contatto «  $p_i$  » e i due spostamenti verticali reali  $w_1$  e  $w_n$  che si hanno in corrispondenza dei concetti estremi della trave; le equazioni che permettono di determinarle sono le 2 equazioni di equilibrio e le  $n$  equazioni di congruenza tra gli spostamenti verticali della trave e del terreno in corrispondenza dei baricentri delle aree d'impronta dei singoli concetti.

Poiché le espressioni degli spostamenti sono funzioni lineari delle incognite  $p_i$ , il sistema è lineare e di immediata soluzione. È stato mostrato che, in tale ipotesi, la distribuzione delle pressioni di contatto corrispondenti ad un determinato schema di carico, dipende solo dai

$$\text{valori assunti dai parametri } \varnothing = \frac{\pi}{4n^4} \frac{1}{(1-\nu^2)}$$

$$\frac{E_s}{E_b} \frac{L^4}{I} \text{ ed } L/B \text{ nell'ipotesi di trave su semi-}$$

spazio elastico, mentre dipende anche da  $H/B$  e dal particolare valore di  $\nu$  nell'ipotesi di trave su strato di spessore limitato; con  $L$ ,  $B$ ,  $E_b$  ed  $I$  si sono indicati rispettivamente la lunghezza, la larghezza, il modulo elastico ed il momento d'inerzia della trave, mentre con  $E_s$ ,  $\nu$  ed  $H$  rispettivamente i parametri elastici del terreno e lo spessore dello strato.

Nell'ipotesi di perfetta aderenza tra la trave

ed il terreno sottostante, le  $n$  tensioni tangenziali di contatto «  $\tau_i$  » portano il numero delle incognite a  $2n + 2$ , ma alle  $n + 2$  equazioni precedenti possiamo aggiungere altre «  $n$  » equazioni che impongono il rispetto della congruenza tra gli spostamenti orizzontali della trave e del terreno in corrispondenza del baricentro delle aree d'impronta degli  $n$  concetti; poiché ancora una volta sia gli spostamenti della trave che del terreno sono funzioni lineari dei carichi, la loro uguaglianza, che esprime la condizione di perfetta aderenza, si traduce in  $n$  equazioni lineari nelle incognite interazioni «  $p_i$  » e «  $\tau_i$  » che possono essere determinate direttamente dalla soluzione del sistema lineare; in questo caso, oltre ai parametri in gioco nell'ipotesi di interfaccia liscia, interviene anche il rapporto  $AN/L$  tra la distanza dell'asse neutro dall'intradosso della trave, dove agiscono le tensioni tangenziali di contatto, e la lunghezza della stessa.

Nell'ipotesi più realistica che all'interfaccia trave-terreno si verifichi uno scorrimento relativo «  $\delta_i$  », questo sarà legato alle tensioni tangenziali di contatto «  $\tau_i$  » da una relazione non lineare  $\delta_i = f(\tau_i)$  che dipende dalle caratteristiche del terreno e della trave <sup>(1)</sup>. Le  $n$  equazioni di congruenza orizzontale, in tal caso, risulteranno non lineari e la soluzione del sistema risultante può essere cercata, per esempio, col metodo dell'applicazione incrementale del carico. Il vettore  $\{f\}$  dei carichi esterni viene frazionato negli  $n_f$  vettori incremento  $\{\Delta f\}$  di modo che: i corrispondenti scorrimenti  $\{\Delta \delta\}$  possono esprimersi come funzione lineare dei relativi incrementi delle tensioni tangenziali di contatto incognite  $\Delta \tau_i$  ed il relativo sistema risolvibile risulta ancora lineare; per le pressioni e le tensioni tangenziali di contatto si avrà infine:  $p_i = \sum \Delta p_i$  e  $\tau_i = \sum \Delta \tau_i$ . Si è visto [BRILLOTTA, 1982] come nel caso d'interfaccia dotata d'attrito la soluzione del  $j^{\text{mo}}$  sistema incrementale dipende oltre che dai parametri già in gioco nell'ipotesi di perfetta aderenza, anche dai due fattori:

$$Z = \frac{\pi E_s}{1800 \cdot B (1 - \nu^2)} \text{ e } \chi_i^j =$$

$$= \text{tg} \varphi^* \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k p_i}{\left[ \text{tg} \varphi^* \sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k p_i - \sum_{k=1}^{j-1} \Delta^k \tau_i \right]^2}$$

<sup>(1)</sup> Per lo scorrimento relativo all'interfaccia trave-terreno è stata impiegata la relazione iperbolica di Kondner [KONDNER *et al.*, 1963].

dove l'espressione  $\chi^i$  indica che nella soluzione del sistema oltre all'angolo d'attrito  $\phi^*$  giocano un certo ruolo anche lo schema e l'entità del carico; nei confronti che saranno effettuati in seguito ci si riferirà sempre allo schema di carico di fig. 1.

Come già ricordato, le tensioni tangenziali di contatto riducono i valori dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi nella trave di fondazione. Per analizzare il ruolo che in tal senso giocano i singoli parametri, i risultati che si ottengono nell'ipotesi di perfetta aderenza o di attrito superficiale all'interfaccia, al variare di quel parametro quando gli altri restano costanti, vengono confrontati con quelli rela-

tivi all'ipotesi d'interfaccia liscia; i calcoli sono stati effettuati con un fattore di discretizzazione  $n = 10$ .

Per completezza verrà esaminato anche il ruolo che può giocare la forma della sezione della trave sulle predette riduzioni.

### 3. Rigidezza della trave e forma della sezione

L'influenza della rigidezza e della forma della sezione è stata esaminata con riferimento alle tre sezioni riportate in fig. 2,a.

Il confronto tra i risultati ottenuti ha evidenziato che le distribuzioni delle pressioni e

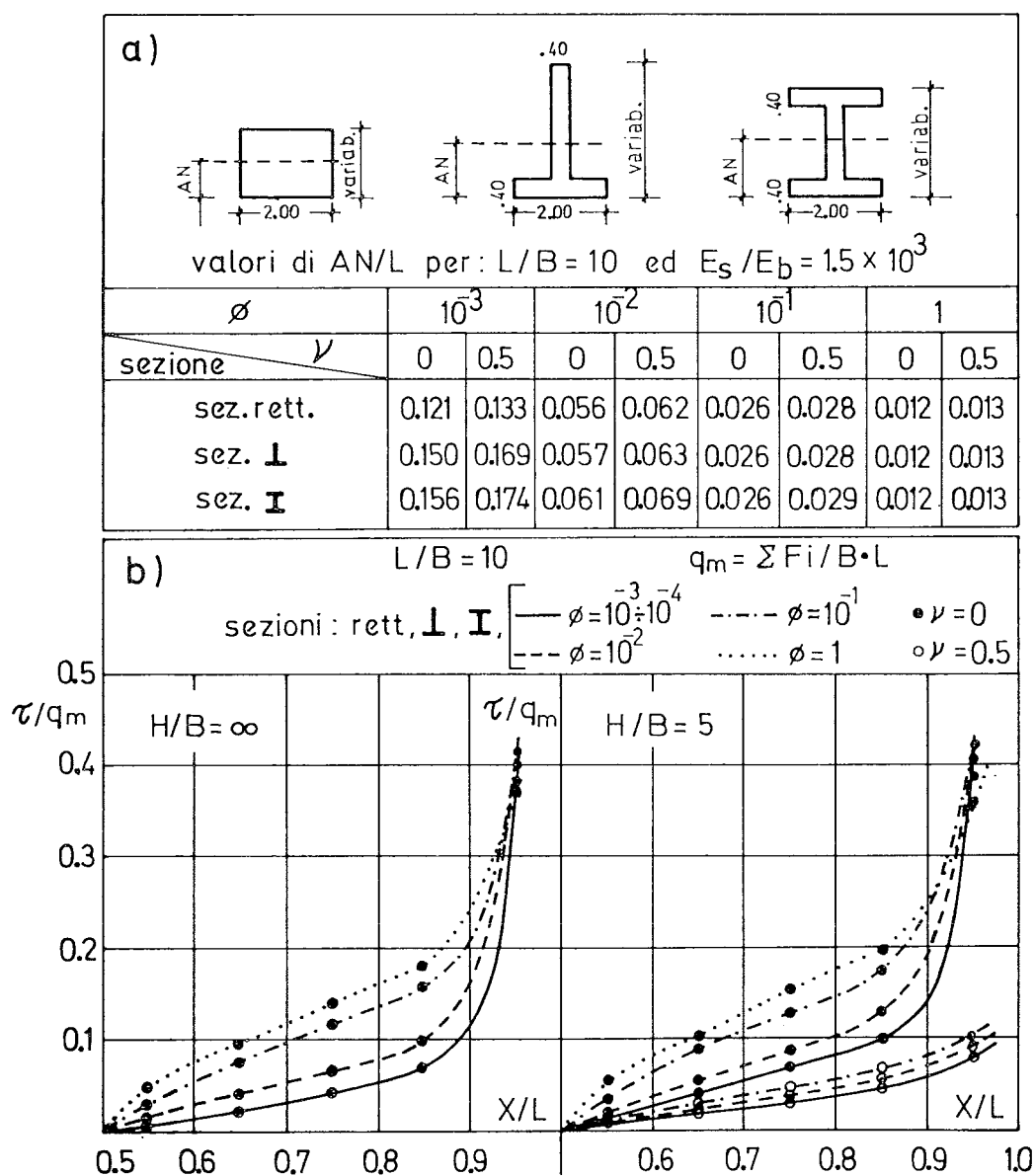


Fig. 2 - Sezioni della trave e distribuzioni delle tensioni tangenziali di contatto.

delle tensioni tangenziali di contatto dipendono essenzialmente dalla rigidezza della trave, risultando pressoché indipendenti dalla forma della sua sezione e quindi dal particolare valore che, a parità degli altri parametri in gioco, viene ad assumere la distanza dell'asse neutro AN/L dall'intradosso della trave <sup>(2)</sup>. Le distribuzioni delle pressioni di contatto subiscono un appiattimento al diminuire della rigidezza [BILOTTA, 1982], qualunque sia l'ipotesi assunta per l'interfaccia, mentre le tensioni tangenziali decrescono con  $\varnothing$  come può evincersi dalla fig. 2,b dove sono riportate tali distribuzioni per l'ipotesi di perfetta aderenza e per lo schema di carichi di fig. 1.

Il contributo che tali tensioni tangenziali forniscono alla riduzione dei momenti e dell'inflexione della trave, dipende ovviamente anche dalla distanza AN/L del loro punto d'applicazione dall'asse neutro della trave; ma poiché a parità di  $\varnothing$  e di momento d'inerzia, per le varie forme della sezione della trave, si hanno distribuzioni di pressioni  $\varphi$  di tensioni tangenziali pressoché coincidenti, ma diversi valori di AN/L, è intuibile che tali riduzioni risulteranno maggiori per quelle travi alla cui sezione corrispondono valori più elevati di AN/L. Qui di seguito esamineremo perciò prima l'effetto combinato delle variazioni delle pressioni di contatto e delle tensioni tangenziali, sulla riduzione dei momenti « M » e dei cedimenti differenziali «  $\Delta w$  » della trave a sezione rettangolare, che si verificano al variare di  $\varnothing$ ; successivamente sarà esaminata l'influenza della forma della sezione confrontando i valori che le suddette riduzioni assumono per le tre forme indicate in fig. 2.

Le variazioni di momenti e cedimenti differenziali massimi vengono espresse come aliquote dei corrispondenti valori che si hanno nell'ipotesi d'interfaccia liscia e saranno indicati tramite i rapporti  $(M^0 - M^a)/M^0$  e  $(\Delta w^0 - \Delta w^a)/\Delta w^0$  per la condizione di perfetta aderenza e con  $(M^0 - M^{a*})/M^0$  e  $(\Delta w^0 - \Delta w^{a*})/\Delta w^0$  per l'ipotesi d'interfaccia dotata d'attrito; gli apici « 0 », « a », « a\* » vengono impiegati per distinguere le caratteristiche corrispondenti rispettivamente all'ipotesi d'interfaccia liscia, con perfetta aderenza o dotata d'attrito.

In fig. 3 sono state riportate le riduzioni dei momenti che, per la trave a sezione rettangolare e per lo schema di carico di fig. 1 si hanno in « A » al variare di  $\varnothing$  <sup>(3)</sup>.

La fig. 3 mostra come le tensioni tangenziali di contatto che si hanno in condizioni di per-

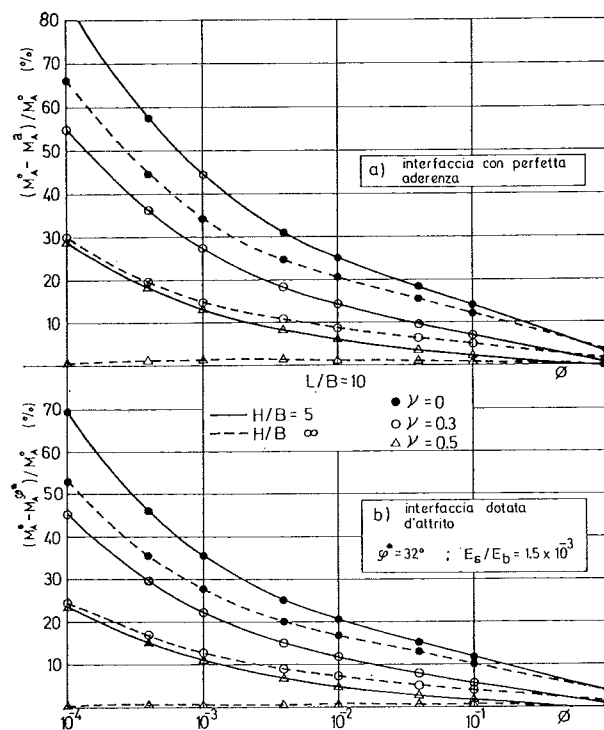


Fig. 3. - Influenza della rigidezza sulla riduzione del momento nella sezione « A » di fig. 1 per la trave a sezione rettangolare.

fetta aderenza, inducono sempre una riduzione dei momenti che cresce al diminuire di  $\varnothing$  e cioè al crescere dell'altezza della trave o di AN/L: solo per il caso di semispazio elastico con  $\nu = 0.5$ , le riduzioni sono praticamente nulle qualunque sia il valore di  $\varnothing$  e ciò perché, in tal caso, tendono a zero le tensioni tangenziali di contatto <sup>(4)</sup>.

Per trave su strato di spessore limitato tali riduzioni risultano sempre più elevate che per la trave su semispazio.

Se all'interfaccia è permesso un certo scorrimento relativo, come per faccia dotata d'attrito, tali riduzioni sono inferiori che nel caso di perfetta aderenza; i risultati riportati in fig. 3,b e ottenuti con i parametri ivi indicati, mostrano

<sup>(2)</sup> Nel caso di trave a sezione rettangolare, ponendo  $AN = \frac{h}{2}$  dove h è lo spessore della trave, può porsi:

$$\varnothing = \pi E_s L^4 / (32 n^4 (1-\nu^2) \cdot E_b \cdot B \cdot AN^3);$$

al variare della forma della sezione varia la relazione tra  $\varnothing$  ed AN/L.

<sup>(3)</sup> La variazione di  $\varnothing$  è stata ottenuta facendo variare lo spessore della trave e quindi il suo momento d'inerzia.

<sup>(4)</sup> Per  $\nu = 0.5$  tali tensioni sono risultate perfettamente nulle quando sono stati trascurati gli spostamenti elastici all'intradosso della trave.

un abbassamento di tali riduzioni del 20% circa.

Diagrammi perfettamente analoghi, ma con valori più elevati, si hanno per le riduzioni dei cedimenti differenziali massimi in presenza di tensioni tangenziali di contatto, come appare dalla fig. 4.

Per esaminare l'influenza della forma della sezione della trave sono state confrontate le riduzioni che si ottengono a parità di  $\varnothing$  per le tre sezioni indicate in fig. 2,a. Le curve rappresentative della variazione di  $M$  e di  $\Delta w$  in funzione di  $\varnothing$  per le sezioni a T e a doppio T, che per brevità non vengono qui riportate, sono risultate del tutto simili a quelle della sezione rettangolare riportate nelle figg. 3 e 4, solo che per le sezioni a doppio T, a parità di  $\varnothing$  ma non di  $AN/L$ , le riduzioni sono risultate sensibilmente superiori.

Per una visione più immediata della diretta dipendenza delle riduzioni di « $M$ » e « $\Delta w$ » dai valori che  $AN/L$ , a parità di  $\varnothing$ , assume per le tre sezioni, tali riduzioni sono state riportate in funzione di  $AN/L$ , nelle figg. 5 e 6.

Le riduzioni del momento nella sezione « $A$ » riportate in fig. 5,a in funzione di  $AN/L$  permettono di effettuare le seguenti considerazioni:

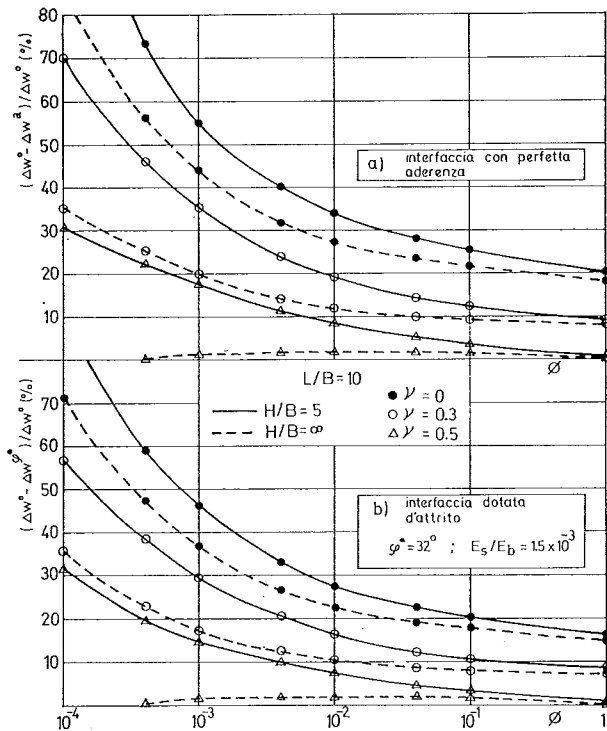


Fig. 4 - Influenza della rigidità sulla riduzione del cedimento differenziale massimo per la trave a sezione rettangolare.

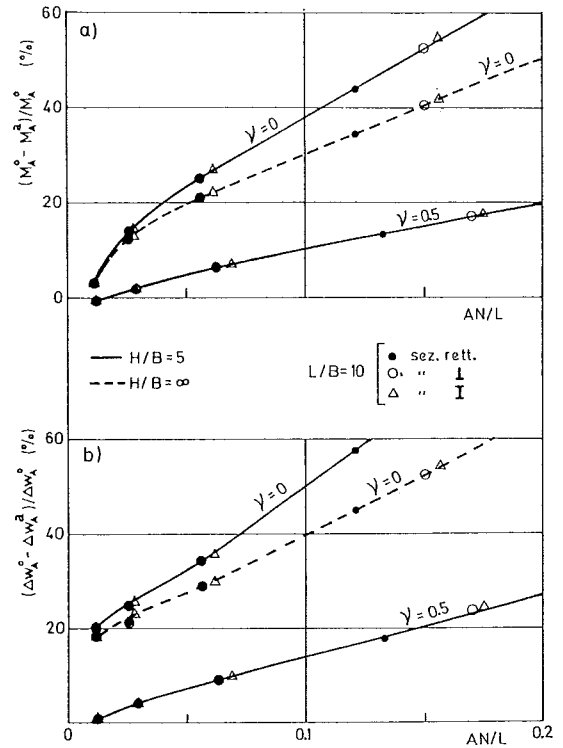


Fig. 5. - Influenza della forma della sezione della trave con perfetta aderenza sulle riduzioni: a) del momento flettente nella sezione « $A$ » di fig. 1; b) del cedimento differenziale massimo.

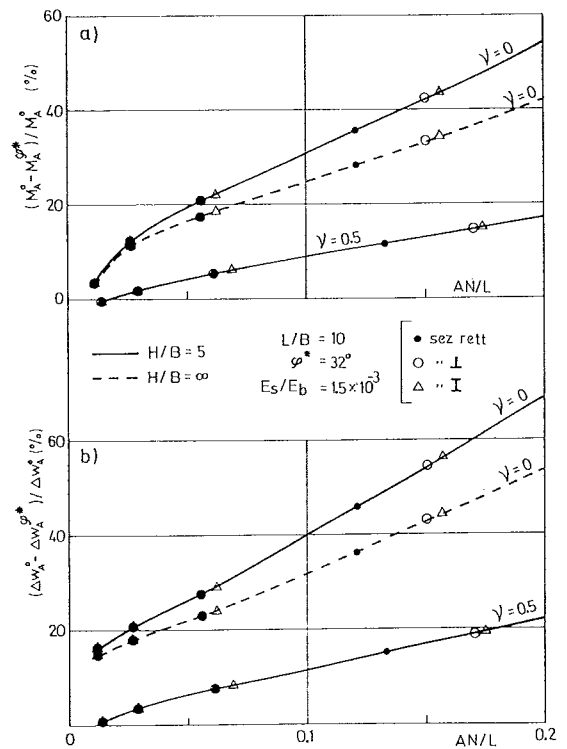


Fig. 6. - Influenza della forma della sezione della trave con interfaccia dotata d'attrito, sulle riduzioni: a) del momento flettente nella sezione « $A$ » di fig. 1; b) del cedimento differenziale massimo.

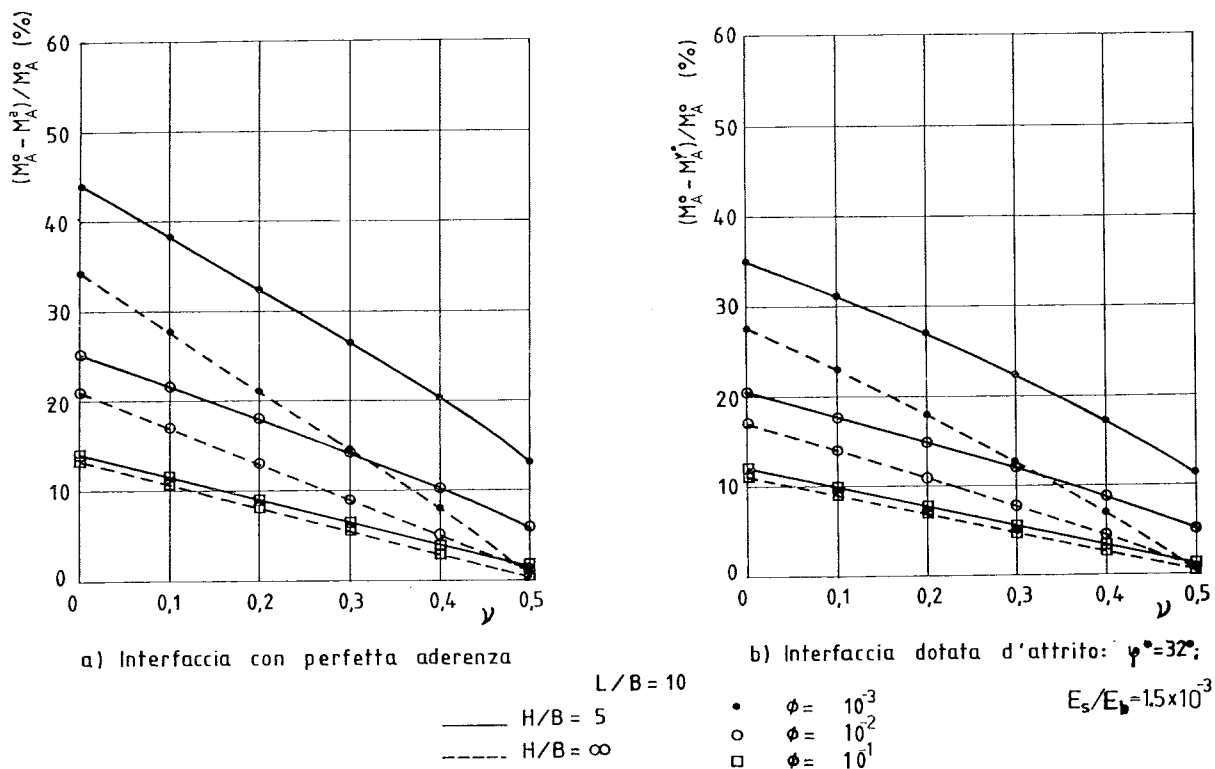


Fig. 7. - Influenza del coefficiente di Poisson « $\nu$ » del terreno sulla riduzione del momento nella sezione «A» di fig. 1.

— le curve mostrano un andamento crescente con  $AN/L$ , con gradiente più elevato per i valori più bassi della rigidità ( $\phi > 10^{-2}$ ) per proseguire con un gradiente inferiore e pressoché costante per valori più alti della rigidità<sup>(5)</sup>;

— qualunque sia la forma della sezione della trave le suddette curve risultano praticamente coincidenti, per cui le riduzioni percentuali della generica sezione a T e a doppio T possono con buona approssimazione essere individuate sulle curve che interpolano i punti relativi alla sezione rettangolare, dal valore di  $AN/L$  che assume la particolare sezione in esame.

In figura 5,b sono state riportate anche le riduzioni dei cedimenti differenziali massimi che si possono verificare al variare di  $AN/L$ ; da essa si evince che le riduzioni sono alquanto superiori a quelle che si hanno per i momenti e che comunque risultano sensibili anche per bassi valori della rigidità.

Nella figura 6 sono state riportate le curve delle riduzioni dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi che si hanno per lo stesso schema di carico nell'ipotesi d'interfaccia dotata d'attrito.

#### 4. Influenza di $\nu$ , $L/B$ ed $H/B$

L'influenza esercitata da  $\nu$  sulle riduzioni di momento indotte dalle tensioni tangenziali di contatto sono sintetizzate in figura 7.

Da questa si evince come sia per semispazio elastico che per strato di spessore limitato, le riduzioni crescono con andamento pressoché lineare al diminuire di  $\nu$ , con gradiente quasi indipendente dallo spessore dello strato e comunque più elevato per i più bassi valori di  $\phi$  e cioè per i più alti valori dello spessore della trave.

Andamenti analoghi si hanno per i cedimenti differenziali (fig. 8).

Il ruolo che può giocare la lunghezza della trave sulle riduzioni dei momenti e dei cedimenti differenziali indotte dalle tensioni tangenziali di contatto, può evincersi dai risultati riportati in fig. 9. Da questa si rileva come al crescere di  $L/B$  tali riduzioni variano con andamento alquanto diverso a seconda che la trave poggia su strato di spessore limitato o illimitato: nel primo caso si verifica una sensibile va-

(5) Per le travi meno rigide le tensioni tangenziali sono più elevate e variano più rapidamente al crescere di  $\phi$  che non per le travi più rigide come appare nella fig. 2.

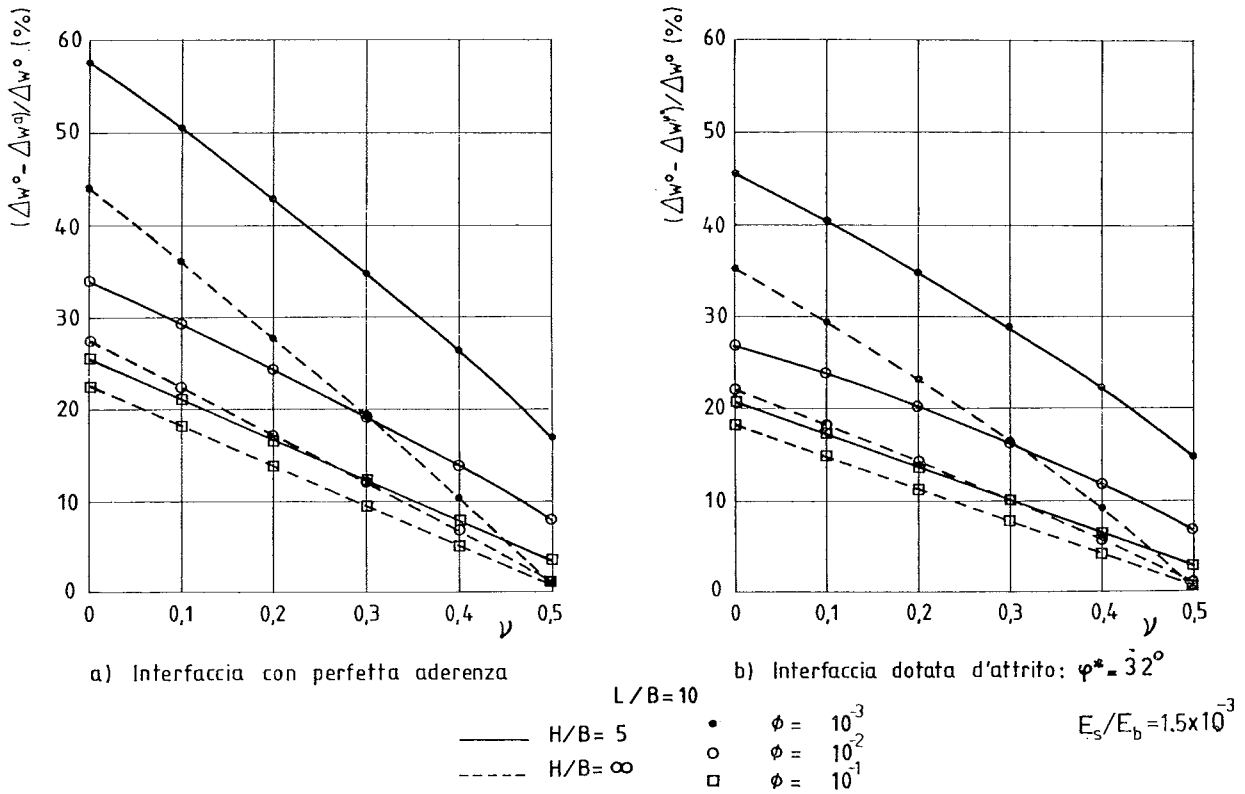


Fig. 8. - Influenza del coefficiente di Poisson « $\nu$ » del terreno sulla riduzione del cedimento differenziale massimo.

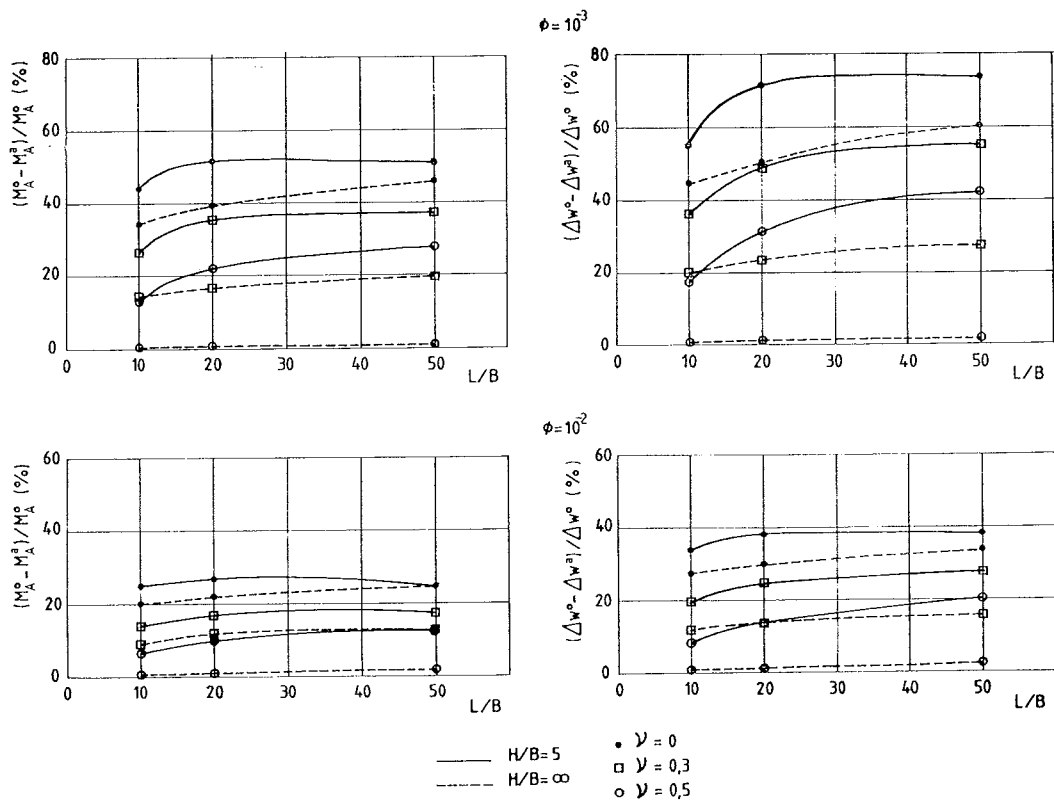


Fig. 9. - Influenza della lunghezza della trave « $L/B$ » sulla riduzione del momento nella sezione « $A$ » di fig. 1.

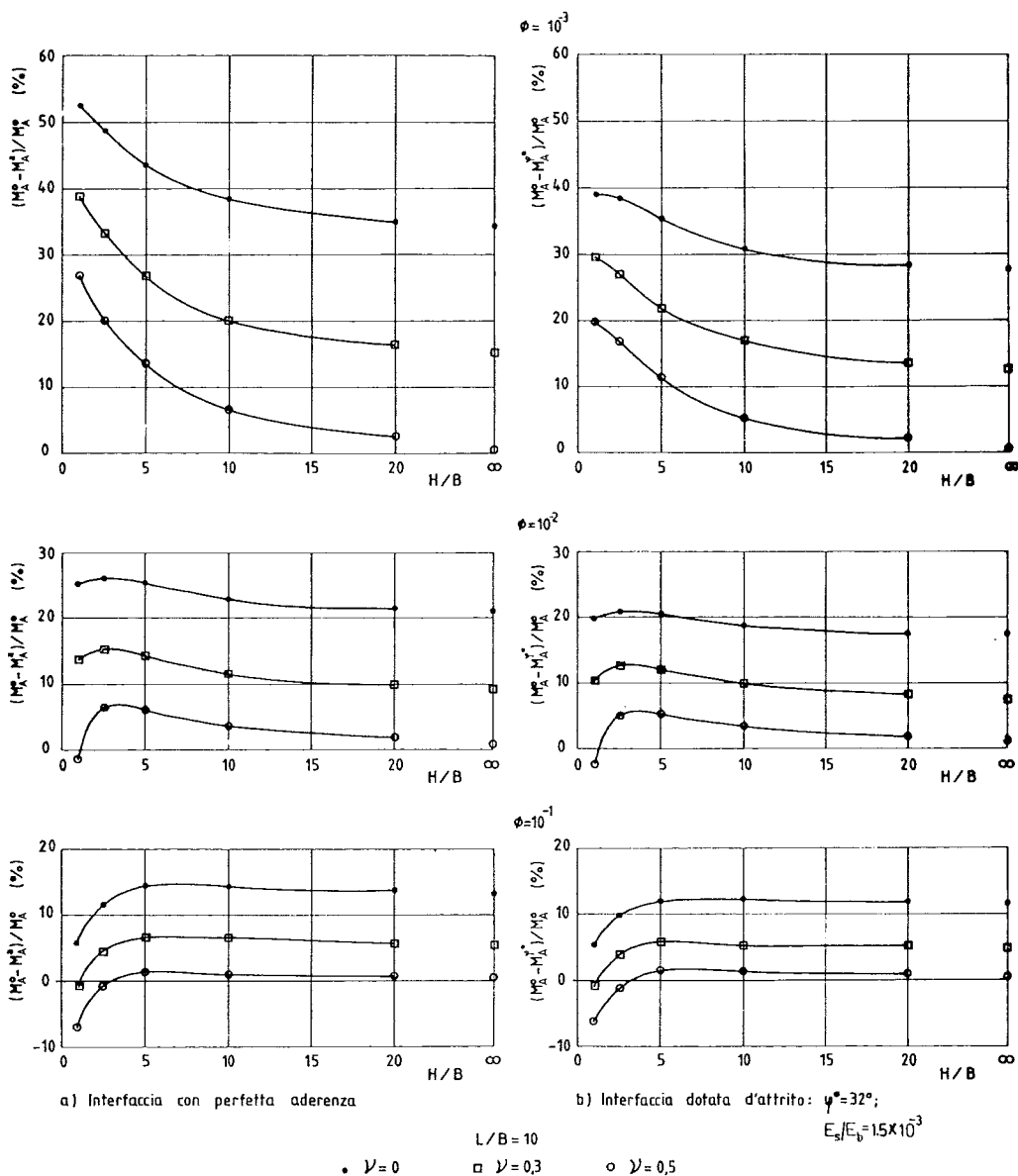


Fig. 10. - Influenza dello spessore dello strato « H/B » sulla riduzione del momento nella sezione « A » di fig. 1.

riazione tra  $L/B = 10$  e  $L/B = 20$  <sup>(6)</sup>, mentre nel secondo caso tale variazione avviene gradualmente in tutto il campo di  $L/B$  indagato; in ogni caso tale variazione diminuisce al diminuire della rigidità della trave per cui per travi non molto rigide possiamo ritenere trascurabile l'influenza di  $L/B$ . Va inoltre rilevato che per strato di spessore limitato, contrariamente a quanto si verifica per il semispazio elastico, l'influenza di  $L/B$  è più marcata per  $\nu = 0.5$  che per  $\nu = 0$ .

Il ruolo che infine può giocare lo spessore « H » dello strato sulla riduzione dei momenti della trave è sintetizzato in fig. 10 da cui risulta che:

— per le travi più rigide (es.  $\emptyset < 10^{-2}$ ) le riduzioni ed il relativo gradiente crescono al diminuire dello spessore dello strato; la dipendenza da  $H/B$  (gradiente della curva) è più accentuata per  $\nu = 0.5$ ;

— per le travi più flessibili ( $\emptyset > 10^{-2}$ ) le riduzioni sono pressoché indipendenti dai valori di  $H/B$ ;

<sup>(6)</sup> Dalla nota (2) può rilevarsi che per valori costanti di  $\emptyset$ ,  $E_s/E_b$  e  $\nu$ , ad un aumento di  $L/B$  corrisponde un aumento di  $AN/L$ ; poiché nel passare da  $L/B = 10$  ad  $L/B = 20$  le tensioni tangenziali di contatto [BILOTTA, 1982] restano pressoché invariate, la sensibile variazione osservata è strettamente connessa all'aumento di  $AN/L$ .



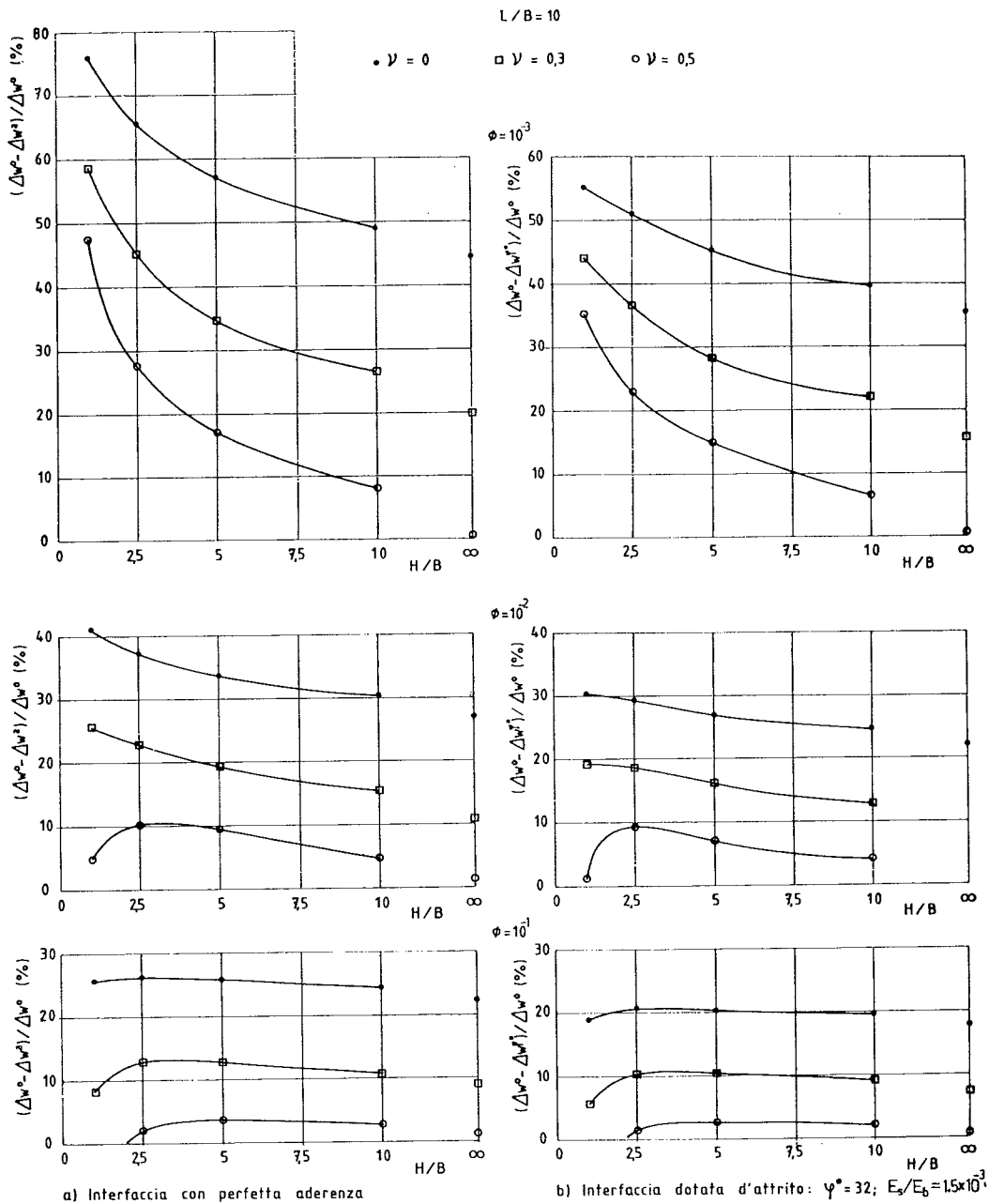


Fig. 11. - Influenza dello spessore dello strato « H/B » sulla riduzione del cedimento differenziale massimo.

— sul comportamento in corrispondenza dei più bassi valori di H/B può avere una qualche influenza il metodo di Steinbrenner impiegato nel procedimento di calcolo [POULOS, 1967; YAMAGUCHI *et al.*, 1968].

Curve analoghe, ma con valori più elevati, sono riportate in fig. 11 per le riduzioni dei cedimenti differenziali.

## 5. Conclusioni

I risultati appena esposti hanno mostrato quanto segue:

— le variazioni di AN/L che si hanno per un dato valore di  $\phi$  al variare della forma della sezione della trave, hanno un'influenza trascurabile sulle distribuzioni delle interazioni, le quali dipendono essenzialmente da  $\phi$ ; le tensioni tangenziali di contatto crescono all'aumentare di  $\phi$  (fig. 2,b);

— le riduzioni dei momenti e dei cedimenti differenziali massimi indotte dalle tensioni tangenziali di contatto, crescono con la rigidezza della trave (figg. 3 e 4);

— riportando in funzione di AN/L le riduzioni dei momenti e dei cedimenti differenziali

massimi, calcolate per le diverse rigidità della trave, si rileva che esse crescono al crescere di AN/L con una relazione che può ritenersi uguale per qualunque forma della sezione (figg. 5 e 6);

— tali riduzioni aumentano al diminuire di  $v$  con andamento pressoché lineare; il gradiente è crescente con la rigidità ed è quasi indipendente dallo spessore dello strato (figg. 7 e 8);

— le suddette riduzioni inoltre mostrano una certa sensibilità ai valori di L/B ed H/B solo per le travi più rigide ( $\varnothing < 10^{-2}$ ); per tali rigidità il loro valore aumenta al crescere di L/B e al diminuire di H/B (figg. 9, 10 e 11);

— dal confronto dei risultati ottenuti per la condizione di perfetta aderenza con quelli relativi all'interfaccia dotata d'attrito, si rilevano comportamenti analoghi, salvo che nella seconda ipotesi le riduzioni risultano meno accentuate; con i parametri qui impiegati per l'interfaccia dotata d'attrito (7) e per lo schema di carichi di fig. 1, tali riduzioni diminuiscono del 20% circa rispetto a quelle ottenute con l'ipotesi di perfetta aderenza.

Considerando l'insieme dei risultati ottenuti, va però tenuto presente che, se ci si riferisce ad un realistico campo dei parametri in gioco, un'analisi che tenga conto delle tensioni tangenziali di contatto fornisce momenti e cedimenti differenziali massimi che risultano solo del 15 ÷ 20% inferiori a quelli che si ottengono con l'ipotesi di interfaccia liscia.

Nella pratica tecnica, tenendo presente le incertezze che possono sussistere nella caratterizzazione di un terreno e l'approssimazione del modello impiegato, è preferibile quindi proporzionare le travi di fondazione prescindendo da tale beneficio e operare a vantaggio di sicurezza, con la più semplice ipotesi d'interfaccia liscia; con tale ipotesi i calcoli risultano notevolmente semplificati, avvalendosi di note tabellazioni di coefficienti d'influenza e del principio di sovrapposizione degli effetti.

#### RINGRAZIAMENTI

L'autore esprime la propria gratitudine al Prof. Ing. Carlo Viggiani per i preziosi suggerimenti e l'incoraggiamento ricevuto nella preparazione del lavoro.

$$(7) Z = \frac{3.000}{1.800 \cdot 2} \frac{\pi}{(1-\nu^2)}; \varphi^* = 32^\circ.$$

#### BIBLIOGRAFIA

- BARDEN L. (1962) - *Distribution of contact pressure under foundation*. Géotechnique, vol. 12, n. 3, pp. 181-198.
- BILOTTA E. (1982) - *Le tensioni tangenziali di contatto nel proporzionamento di una trave di fondazione*. Rivista Italiana di Geotecnica, 1982.
- BOROWICKA H. (1936) - *The distribution of pressure under a uniformly loaded elastic strip resting on elastic-isotropic ground*. Final Rep. 2nd Congr. Int. Assn. Bridge Struct. Engng., 1936, pp. 840-845 (\*).
- BROWN P. T. (1972) - *Longitudinal bending of uniformly loaded strip footings on deep elastic foundations*. Australian Geomech. J., G 2 (1), pp. 28-31.
- BROWN P. T. (1975) - *Strip footing with concentrated loads on deep elastic foundations*. Geotech. Engng., 6 (1), pp. 1-13.
- BURMISTER D. M. (1943) - *The theory of stresses and displacements in layered systems*. Proc. Highway Res. Bd., 23-126.
- CONWAY H. D., VOGEL S. M., FARNHAM K. A., SO S. (1966) - *Normal and shearing contact stresses in indented strips and slabs*. Int. J. Engng. Sci., 4, pp. 343-359 (\*).
- ESPOSITO L., EVANGELISTA A., VIGGIANI C. (1978) - *Interazione tra una trave di fondazione e un terreno alla Gibson*. XIII Convegno Nazionale di Geotecnica, Merano 1978.
- GIBSON R. E. (1967) - *Some results concerning displacements and stresses in a non homogeneous elastic half-space*. Géotechnique, 17, pp. 58-67.
- KONDNER R. L., ZELASKO J. (1963) - *A hyperbolic stress-strain formulation for sands*. Proc. second Pan-Am. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., vol. 1, Brasil.
- LEE I. K., PHILLIPS J. T. (1969) - *An analysis of flexible strips on a linear elastic foundation*. Civ. Engng. Trans. Instn. Engrs., Australia, CE 11 (1), 1-8 (\*).
- MUSKHELISHVILI N. I. (1963) - *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 4th ed., Noordhoff, Groningen (\*).
- POULOS H. G. (1967) - *Stresses and displacements in an elastic layer underlain by a rough rigid base*. Géotechnique, 17, pp. 378-410.
- SADOWSKY M. (1928) - *Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie*. Z. Angew. Math. Mech., 8 (2), 107-121 (\*).
- SHERIF G., KOENIG G. (1975) - *Rafts and beams on compressible subsoil*. Springer-Verlag.
- SPENCE D. A. (1973) - *An eigenvalue for elastic contact with finite friction*. Proc. Camb. Phil. Soc., 73, 249-268 (\*).
- STEINBRENNER W. (1934) - *Tafeln für Setzungsberechnung*. Die Strass, vol. 1, 121-124.
- TERZAGHI K. (1947) - *Theoretical soil mechanics*. Wiley, New York, p. 390.
- YAMAGUCHI H., KIMURA T., KONNO H. (1968) - *On the contact distribution between rigid loads and elastic solid underlain by a rigid boundary*. Soil and foundations, vol. VIII, n. 3, 460-462.

#### SUMMARY

##### Contact shear stress in a foundation beam: analysis of the influence of the parameters

In a previous paper [BILOTTA, 1982], it was shown that contact shear stress causes a reduction in both the bending moments and the maximum differential settlement in a foundation beam.

In this paper, the results obtained for a beam with either full adherence or frictional contact are compared

(\* da HOOPER J. A. - *Developments in Soil Mechanics*. 1. C. R. Scott.

with those relative to a perfectly smooth beam, in the case of vertical and symmetrical loading (fig. 1).

For both the cases, it is shown that contact shear stress values are highly dependent on the flexibility ratio  $\varnothing$  and the Poisson's ratio  $\nu$ ; the thickness of the soil layer plays a minor rôle, while the influence of the ratio  $L/B$  ( $L$  = length of the beam,  $B$  = width of the beam) is negligible.

Contact shear stress increase as the flexibility  $\varnothing$  increases and with decreasing  $\nu$  and  $H/B$  values (fig. 2), thus causing a more uniform distribution of normal stresses at the beam-soil interface; reductions in both the bending moments and the differential settlement increase as  $\varnothing$ ,  $\nu$ ,  $H/B$  decrease (fig. 3, 4, 7, 8, 10 and 11).

The influence of the shape of the beam cross section on the contact pressures and shear stress is negligible, while the resulting reductions in the bending moments and the differential settlement are significantly dependent on  $AN/L$  values (fig. 5 and 6); in the case of vertical and symmetrical loading (fig. 1) and for a friction angle of  $32^\circ$ , such reductions are about 20% lower for frictional contact, than those relative to full adherence contact.

In the range of values of the above parameters in most engineering problems, the bending moments and the maximum differential settlement calculated accounting for the contact shear stress distribution are only 15 ÷ 20% lower than those evaluated for a perfectly smooth beam.